ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ LUẬN

TẬP IĐÊAN NGUYÊN TỐ GẮN KẾT CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG QUA ĐỊA PHƯƠNG HÓA VÀ ĐẦY ĐỦ HÓA

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2016

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

NGUYỄN THỊ LUẬN

TẬP IĐÊAN NGUYÊN TỐ GẮN KẾT CỦA MÔĐUN ĐỐI ĐỒNG ĐIỀU ĐỊA PHƯƠNG QUA ĐỊA PHƯƠNG HÓA VÀ ĐẦY ĐỦ HÓA

Chuyên ngành: Đại số và lý thuyết số
Mã số: 604. 601. 04

LUẬN VĂN THẠC SỸ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học: GS. TS. LÊ THỊ THANH NHÀN

THÁI NGUYÊN - 2016

LỜI CAM ĐOAN

Tôi xin cam đoan rằng các kết quả nghiên cứu trong luận văn này là trung thực và không trùng lặp với các đề tài khác. Tôi cũng xin cam đoan rằng các tài liệu trích dẫn trong luận văn đã được chỉ rõ nguồn gốc.

Thái Nguyên,ngày 15 tháng 04 năm 2016

Học viên

NGUYỄN THỊ LUẬN

LỜI CẢM ƠN

Luận văn được hoàn thành dưới sự chỉ bảo và hướng dẫn tận tình của GS. TS. Lê Thị Thanh Nhàn. Cô đã dành nhiều thời gian hướng dẫn và giải đáp thắc mắc của tôi trong suốt quá trình làm luận văn. Tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc đến cô.

Tôi xin gửi tới các thầy cô ở Viện Toán học Hà Nội, Khoa Toán, Khoa Sau đại học Trường Đại học Sư phạm-Đại học Thái Nguyên lời cảm ơn sâu sắc nhất về công lao dạy dỗ trong suốt quá trình học tập tại trường.

Tôi xin cảm ơn gia đình, bạn bè và người thân đã quan tâm, tạo điều kiện, động viên, cổ vũ để tôi có thể hoàn thành nhiệm vụ của mình.

Thái Nguyên,ngày 15 tháng 04 năm 2016

Học viên

NGUYỄN THỊ LUẬN

Mục lục

Mở đầu

Cho $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương Noether, M là R-môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d$ và A là R-môđun Artin. Với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$ ta biết rằng

$$\operatorname{Ass}_{R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_R M, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}.$$

Với A là R-môđun Artin, tập các iđêan nguyên tố gắn kết của A, kí hiệu là $\operatorname{Att}_R A$, được định nghĩa bởi I. G. Macdonald [Mac] có vai trò quan trọng tương tự như vai trò của tập các iđêan nguyên tố liên kết của M. Ta đã biết rằng môđun đối đồng điều địa phương $H^i_\mathfrak{m}(M)$ là Artin với mọi $i \geq 0$. Do đó một câu hỏi tự nhiên đặt ra là liệu mối quan hệ tương tự giữa tập $\operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}} H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p})$ và $\operatorname{Att}_R H^i_\mathfrak{m}(M)$ có đúng không, tức là công thức

$$\operatorname{Att}_{R_\mathfrak{p}} H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_\mathfrak{p}}(M_\mathfrak{p}) = \{\mathfrak{q}R_\mathfrak{p} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R H^i_\mathfrak{m}(M), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\} \tag{1}$$

có đúng với mọi $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ không? Trong [S], R.Y. Sharp đã chứng minh được rằng nếu R là vành thương của vành Gorenstein địa phương thì nguyên lý chuyển dịch qua địa phương hóa (1) là đúng. Tuy nhiên nguyên lý này không đúng trong trường hợp tổng quát (xem [BS, Ví dụ 11.3.14]).

Kí hiệu $\widehat{R}$ và $\widehat{M}$ lần lượt là vành và $\widehat{R}$-môđun đầy đủ của R và M theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic, ta có mối quan hệ sau đây giữa tập $\operatorname{Ass}_R M$ và $\operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{M}$:

$$\operatorname{Ass}_R M = \{\mathfrak{P} \cap R \mid \mathfrak{P} \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{M}\} \text{ và } \operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{M} = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M} \operatorname{Ass}_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R}).$$

Vậy câu hỏi tiếp theo là với R-môđun Artin A thì mối quan hệ tương tự giữa tập $\operatorname{Att}_R A$ và $\operatorname{Att}_{\widehat{R}} A$ có đúng không? Với R-môđun Artin A ta đã biết rằng $\operatorname{Att}_R A = \{\mathfrak{P} \cap R \mid \mathfrak{P} \in \operatorname{Att}_{\widehat{R}} A\}$ (xem [BS]). Tuy nhiên mối quan hệ tương tự như công thức thứ hai là không đúng ngay cả khi $A = H^i_{\mathfrak{m}}(M)$. Tức là quan hệ

$$\operatorname{Att}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}}(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R}) \tag{2}$$

nhìn chung không xảy ra. Chú ý rằng nếu R là vành thương của vành Gorenstein địa phương thì công thức (2) đúng với bất kì môđun đối đồng điều địa phương $H^i_{\mathfrak{m}}(M)$ (xem [CN]). Cuối năm 2014, trong bài báo *"Attached primes of local cohomology modules under localization and completion"* đăng trong tạp chí Đại số, L. T. Nhàn và P. H. Quý đã chứng minh được sự chuyển dịch qua địa phương hóa (1) và chuyển dịch qua đầy đủ hóa (2) là hai điều kiện tương đương với tính chất R là vành catenary phổ dụng và tất cả các thớ hình thức của R là Cohen-Macaulay. Mục tiêu của luận văn là chứng minh lại kết quả trên của L. T. Nhàn và P. H. Quý:

Định lý chính. *Các điều kiện sau là tương đương:*

(i) R là catenary phổ dụng và các thớ hình thức là Cohen-Macaulay;

(ii) $\operatorname{Att}_{R_{\mathfrak{p}}} H^{i-\dim(R/\mathfrak{p})}_{\mathfrak{p}R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Att}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M), \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$ *với mọi R-môđun M hữu hạn sinh, số nguyên $i \geq 0$ và* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec} R$*;*

(iii) $\operatorname{Att}_{\widehat{R}} H^i_{\mathfrak{m}}(M) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Att}_R H^i_{\mathfrak{m}}(M)} \operatorname{Att}_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})$ *với mọi R-môđun M hữu hạn sinh và số nguyên $i \geq 0$.*

Luận văn gồm 2 chương. Phần đầu Chương 1 nhắc lại các công thức chuyển dịch tập iđêan nguyên tố liên kết qua địa phương hóa và qua đầy đủ hóa. Phần tiếp theo trình bày một số vấn đề về tiêu chuẩn Artin của Melkersson [Mel], tập iđêan nguyên tố gắn kết và môđun đối đồng điều địa phương. Chương 2 là chương chính của luận văn, trình bày về hệ tham số, các lớp vành đặc biệt, một số bổ đề liên quan và chứng minh Định lý chính.

Chương 1

Kiến thức chuẩn bị

Trong suốt luận văn này, ta luôn giả thiết $(R, \mathfrak{m})$ là vành giao hoán địa phương Noether. Cho M là R-môđun hữu hạn sinh với $\dim M = d$. Cho A là R-môđun Artin và L là một R-môđun (không nhất thiết hữu hạn sinh hay Artin). Kí hiệu $\widehat{R}$ và $\widehat{M}$ lần lượt là đầy đủ của R và M theo tôpô $\mathfrak{m}$-adic. Ta cũng kí hiệu I là iđêan tùy ý của R và $\mathrm{Var}(I)$ là tập các iđêan nguyên tố của R chứa I.

1.1 Tập iđêan nguyên tố liên kết qua địa phương hóa và đầy đủ hóa

Trong tiết này ta nhắc lại công thức chuyển dịch tập iđêan nguyên tố liên kết của R-môđun hữu hạn sinh M qua địa phương hóa và qua đầy đủ hóa. Các kết quả ở tiết này được tham khảo từ [Mat] và [S].

Định nghĩa 1.1.1. Một iđêan nguyên tố $\mathfrak{p}$ của R được gọi là *iđêan nguyên tố liên kết của* M nếu tồn tại một phần tử $x \in M$ sao cho $\mathrm{Ann}_R(x) = \mathfrak{p}$. Tập các iđêan nguyên tố liên kết của M được kí hiệu là $\mathrm{Ass}_R(M)$.

Sau đây là một số tính chất của tập các iđêan nguyên tố liên kết.

Tính chất 1.1.2. *(i) Cho* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Spec}(R)$. *Khi đó* $\mathfrak{p} \in \mathrm{Ass}_R(M)$ *khi và chỉ khi* M *chứa một môđun con đẳng cấu với* $R/\mathfrak{p}$.

(ii) Cho $\mathfrak{p}$ *là phần tử tối đại của tập các iđêan có dạng* $\operatorname{Ann}_R(x)$ *trong đó* $0 \neq x \in M$*. Khi đó* $\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R(M)$*. Vì thế,* $M \neq 0$ *khi và chỉ khi* $\operatorname{Ass}_R(M) \neq \emptyset$*.*

(iii) Đặt $ZD(M) = \{a \in R \mid \text{tồn tại } m \neq 0, m \in M \text{ sao cho } am = 0\}$*. Khi đó tập* $ZD(M)$ *các ước của không trong* M *chính là hợp của các iđêan nguyên tố liên kết của* M*.*

(iv) Cho $0 \to M' \to M \to M'' \to 0$ *là dãy khớp các* R*-môđun. Khi đó*

$$\operatorname{Ass}_R M' \subseteq \operatorname{Ass}_R M \subseteq \operatorname{Ass}_R M' \cup \operatorname{Ass}_R M''.$$

(v) $\operatorname{Ass}_R(M) \subseteq \operatorname{Supp}_R(M)$ *và mỗi phần tử tối tiểu của* $\operatorname{Supp}_R(M)$ *đều thuộc* $\operatorname{Ass}_R(M)$*.*

(vi) Nếu M *là* R*-môđun hữu hạn sinh thì* $\operatorname{Ass}_R(M)$ *là tập hữu hạn. Hơn nữa* $\operatorname{Ass}_R(M) \subseteq \operatorname{Var}(\operatorname{Ann}_R M)$*. Vì thế* $\operatorname{Rad}(\operatorname{Ann}_R M)$ *là giao các iđêan nguyên tố liên kết của* M*.*

(vii) Với S *là tập đóng nhân trong* R *thì*

$$\operatorname{Ass}_{S^{-1}R}(S^{-1}M) = \{S^{-1}\mathfrak{q} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_R M, \mathfrak{q} \cap S = \emptyset\}.$$

Cho $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$, suy ra $S = R \backslash \mathfrak{p}$ là một tập đóng nhân. Ta kí hiệu $R_{\mathfrak{p}} := S^{-1}R$ và $M_{\mathfrak{p}} := S^{-1}M$. Khi đó ta có tính chất chuyển dịch của tập iđêan nguyên tố liên kết qua địa phương hóa như sau.

Mệnh đề 1.1.3. $\operatorname{Ass}_{R_{\mathfrak{p}}}(M_{\mathfrak{p}}) = \{\mathfrak{q}R_{\mathfrak{p}} \mid \mathfrak{q} \in \operatorname{Ass}_R M, \mathfrak{q} \subseteq \mathfrak{p}\}$.

Kết quả tiếp theo là tính chất chuyển dịch của tập iđêan nguyên tố liên kết qua đầy đủ hóa. Nhắc lại rằng, một dãy $(x_n) \subset R$ được gọi là một *dãy Côsi theo tôpô* $\mathfrak{m}$*-adic* nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước, tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n - x_m \in \mathfrak{m}^k$, với mọi $m, n \geq n_0$. Dãy $(x_n) \subset R$ được gọi là *dãy không* nếu với mỗi $k \in \mathbb{N}$ cho trước tồn tại $n_0 \in \mathbb{N}$ sao cho $x_n \in \mathfrak{m}^k$,với mọi $n \geq n_0$. Ta trang bị quan hệ tương đương trên tập các dãy Côsi như sau : Hai dãy Côsi $(x_n), (y_n)$ được gọi là *tương đương* nếu dãy $(x_n - y_n)$ là dãy không. Kí hiệu $\widehat{R}$ là tập các lớp tương đương của các dãy Côsi. Chú ý rằng tổng và tích của hai dãy Côsi là một dãy Côsi, quy tắc cộng $(x_n)+(y_n) = (x_n+y_n)$ và quy tắc nhân $(x_n)(y_n) = (x_n y_n)$ không phụ thuộc vào cách chọn đại diện của các lớp tương đương. Vì thế nó là các phép toán trên $\widehat{R}$ và cùng với phép toán này $\widehat{R}$ làm thành một vành Noether địa phương với iđêan tối đại duy nhất là $\mathfrak{m}\widehat{R}$. Vành $\widehat{R}$ vừa xây dựng được gọi là *vành đầy đủ theo tôpô* $\mathfrak{m}$*-adic* của R. Bằng cách tương tự ta có khái niệm *môđun đầy đủ theo tôpô* $\mathfrak{m}$*-adic* cho R-môđun L tùy ý và được kí hiệu là $\widehat{L}$. Nhưng chú ý rằng với $\mathfrak{p} \in \operatorname{Spec}(R)$ thì chưa chắc đã có $\mathfrak{p}\widehat{R} \in \operatorname{Spec}(R)$.

Mệnh đề 1.1.4. *Các phát biểu sau là đúng*

(i) $\operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{M} = \bigcup\limits_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M} \operatorname{Ass}_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R})$.

(ii) $\operatorname{Ass}_R M = \{\mathfrak{P} \cap R \mid \mathfrak{P} \in \operatorname{Ass}_{\widehat{R}} \widehat{M}\}$.

Chứng minh. (i). Vì $f : R \to \widehat{R}$ là đồng cấu tự nhiên và $\widehat{R}$ là phẳng trên R nên theo [Mat, Định lý 23.2(ii)] ta có

$$\operatorname{Ass}_{\widehat{R}}(M \otimes \widehat{R}) = \bigcup_{\mathfrak{p} \in \operatorname{Ass}_R M} \operatorname{Ass}_{\widehat{R}}(\widehat{R}/\mathfrak{p}\widehat{R}).$$

Hơn nữa $M \otimes \widehat{R} \cong \widehat{M}$ nên khẳng định (i) đã được chứng minh.

(ii). Gọi $f^a : \operatorname{Spec}(\widehat{R}) \to \operatorname{Spec}(R)$ là ánh xạ cảm sinh của f, tức là $f^a(\mathfrak{P}) = f^{-1}(\mathfrak{P}) := \mathfrak{P} \cap R$ với mọi $\mathfrak{P} \in \operatorname{Spec}(\widehat{R})$. Vì f là ánh xạ phẳng hoàn toàn nên theo [Mat, Định lý 7.3(i)], f^a là toàn ánh. Áp dụng [Mat, Định lý 23.2](ii) ta có